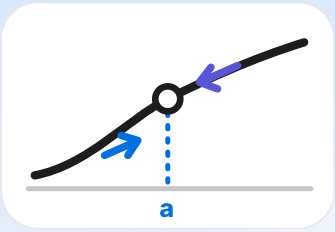
BagrutAce

رياضيات · ورقة سريعة

4 حالات بتحلّ أغلب أسئلة الـ limit

أوّل إشي **دايمًا عوّضوا**. الّي بيطلع بيحكيلكم بأي حالة انتو.



1 عوّضوا. طلع عدد؟ هو الجواب

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-1}$$

عوّضنا $x=3$ $\quad \frac{3^2+1}{3-1}=\frac{10}{2}$

طلع عدد، خلص $\quad =5$

بأي حالة انتو؟

عدد ✓ هو الجواب	$\frac{0}{0}$ حالة 2
$x\to\infty$ بالسؤال حالة 3	$\frac{\text{عدد}}{0}$ حالة 4

2 $\frac{0}{0}$: حلّلوا وبسّطوا، وعوّضوا كمان مرّة

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

عوّضنا $x=2$ $\quad \frac{4-10+6}{4-4}=\frac{0}{0}$

حلّلنا واختصرنا $\quad \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$

عوّضنا كمان مرّة $\quad \frac{2-3}{2+2}$

الجواب $\quad =-\frac{1}{4}$

هين $\frac{0}{0}$ معناها إنه $(x-2)$ موجود **بالبسط وبالمقام**. اختصروه.

3 $x\to\infty$: قسّموا على أعلى قوّة بالمقام

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{4x^2+1}$$

أعلى قوّة بالمقام $\quad x^2$

قسّمنا البسط والمقام على x^2 $\quad \frac{2-\frac{3}{x}}{4+\frac{1}{x^2}}$

عدد على x^n بيروح لـ 0 $\quad \frac{2-0}{4+0}$

الجواب $\quad =\frac{1}{2}$

طريقة أسرع: قارنوا أعلى قوّة فوق وتحت

قوّة البسط أصغر	نفس القوّة: معامل فوق ÷ معامل تحت	قوّة البسط أكبر
0	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	∞ أو $-\infty$

4 $\frac{\text{عدد}}{0}$: عوّضوا من اليمين ومن الشمال، وشوفوا الإشارة

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}$$

عوّضنا $x=1$ $\quad \frac{1+2}{1-1}=\frac{3}{0}$

من اليمين $x=1.01$ $\quad \frac{3.01}{0.01}\Rightarrow\frac{+}{+}\Rightarrow+\infty$

من الشمال $x=0.99$ $\quad \frac{2.99}{-0.01}\Rightarrow\frac{+}{-}\Rightarrow-\infty$

إشارتين مختلفتين $\quad$ الـ limit مش موجود

نفس الإشارة من الجهتين؟ موجبة ← $+\infty$، سالبة ← $-\infty$.

مثال: $\frac{x+2}{(x-1)^2}$ ← $+\infty$ من الجهتين.

بالصفحة 2: قانون لوبيتال، طريقة ثانية لـ $\frac{0}{0}$ ←

BagrutAce

رياضيات · ورقة سريعة

قانون لوبيتال L'Hôpital

طلع $\frac{0}{0}$ بالتعويض؟ بحالات معيّنة في **طريقة أسرع**.

$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{f'}{g'}$$

1 القانون: بس لـ $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

01 عوّضوا. طلع $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$؟

02 اشتقّوا **البسط لحاله**، و**المقام لحاله**

03 عوّضوا كمان مرّة. لسّا $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$؟ **ارجعوا لـ 02**

لما التعويض **ما بيعطي** $\frac{0}{0}$ ولا $\frac{\infty}{\infty}$، بطّلوا تشتقّوا: طلع عدد؟ **هو الجواب**. طلع $\frac{\text{عدد}}{0}$؟ روحوا لحالة 4 بصفحة 1.

! انتبهوا: هاي مش قانون مشتقة القسمة

✗ مش مشتقة الكسر كلّه

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

✓ كل واحد لحاله

$$\frac{f'}{g'}$$

وعلى أي إشي غير $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ (زي $\frac{3}{0}$ بحالة 4 بصفحة 1) **ممنوع** تستعملوه: ممكن يطلعلكم جواب غلط.

2 مرّة وحدة $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

عوّضنا: $\frac{0}{0}$

اشتقّينا: $\frac{2x-5}{2x}$

عوّضنا $x=2$: $\frac{4-5}{4}$

نفس جواب صفحة 1 ✓: $= -\frac{1}{4}$

3 مرّتين $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$$

عوّضنا: $\frac{1-3+2}{1-2+1} = \frac{0}{0}$

اشتقّينا: $\frac{3x^2-3}{2x-2} \rightarrow \frac{0}{0}$

اشتقّينا كمان: $\frac{6x}{2} \rightarrow \frac{6}{2}$

الجواب: $= 3$

4 مرّتين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{4x^2+1}$$

عوّضنا: $\frac{\infty}{\infty}$

اشتقّينا: $\frac{4x-3}{8x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

اشتقّينا كمان: $\frac{4}{8}$

نفس جواب صفحة 1 ✓: $= \frac{1}{2}$

5 قصّته: القانون مش إلو!

1696

بسنة **1696**، الماركيز الفرنسي Guillaume de l'Hôpital نشر أوّل كتاب تعليمي بالتفاضل: «Analyse des Infiniment Petits»، والقانون طلع فيه.

بس الفكرة مش إلو. من سنة **1694** كان يدفع مصاري لمعلّمه Johann Bernoulli عشان يبعثله اكتشافاته. فالقانون بالأصل لـ Bernoulli، وطلع باسم لوبيتال.

بالبچروت: اسألوا معلّمكم إذا مسموح تكتبوه بالحل. إذا لأ، استعملوه عشان **تفحصوا جوابكم**.

بدكم تتدرّبوا على أسئلة الـ limit؟

حلّوا على BagrutAce، وAce بيصلّحلكم على طول.

يلّا نبلّش ← bagrutace.com